KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ DERSİ

ARASINAVI YANIT ANAHTARI 04.04.2018

1) $|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow z\cdot\bar{z}=1 \Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$ ve $|\bar{z}|=\frac{1}{|z|}=1$ olur.

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = \left|\frac{\overline{az+b}}{b\bar{z}+a}\right| = \left|\frac{\overline{az+b}}{b\frac{1}{z}+a}\right| = \left|\frac{\overline{az+b}}{(b+az)\cdot\frac{1}{z}}\right|$$

$$= \frac{|az+b|}{|b+az|\cdot\frac{1}{|z|}} = \frac{|az+b|}{|b+az|\cdot 1} = 1 \text{ elde edilir.}$$

2) $(1-i)$ için $|1-i|=\sqrt{2}$, $\theta = \mathrm{Arg}z = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x} = \mathrm{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$1-i = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

$(1+i)$ için $|1+i| = \sqrt{2}$, $\theta = \mathrm{Arg}z = \mathrm{Arctan}\frac{y}{x} = \mathrm{Arctan}1 = \frac{\pi}{4}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(\sqrt{3}+i)$ için $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$

$\theta = \mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$(\sqrt{3}-i)$ için $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{3+1} = 2$, $\theta = \mathrm{Arctan}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

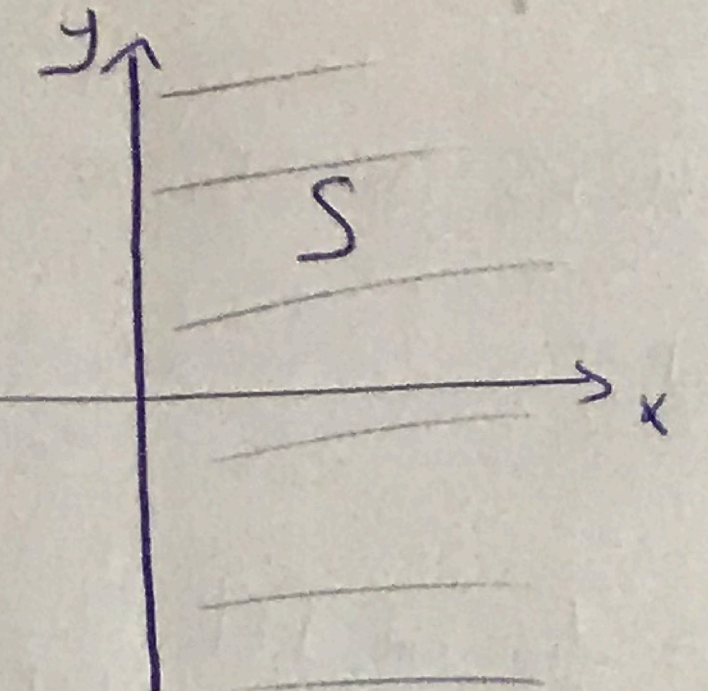
$$\frac{(1-i)\cdot(\sqrt{3}+i)}{(1+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)\cdot\cancel{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\cancel{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cancel{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)}$$

$$= \frac{\cos(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{4}+(-\frac{\pi}{6})) + i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

3)



$\forall w \in S$ verilsin. $\mathrm{Re}\,w > 0$ olsun.
Bir $r>0$ sayısını $0<r<\mathrm{Re}\,w$ olacak şekilde seçelim. Herhangi bir $z_0 \in B(w,r)$ alalım.
Bu durumda $|z_0-w|<r$ olur.

$z_0 = w + z_0 - w$

$\mathrm{Re}\,z_0 = \mathrm{Re}\,w + \mathrm{Re}(z_0-w)$, $\left(-|z| \le \mathrm{Re}\,z \le |z| \text{ eşitsizliği kullanılırsa}\right)$

$\geq \mathrm{Re}\,w - |z_0-w|$

$> \mathrm{Re}\,w - r > 0 \Rightarrow z_0 \in S$ bulunur. O halde

$\mathrm{Re}\,w > 0$ olması durumunda, $B(w,r) \subset S$ olup, w, S nin bir iç noktasıdır.

$\mathrm{Re}\,w = 0$ ise, $r>0$ sayısının seçimi ne olursa olsun, $\mathrm{Re}\,z < 0$ olan z noktalarını içereceğinden S, $B(w,r)$ yuvarını içermez.
Bu durumda w, S nin bir iç noktası değildir.

O halde S, açık küme değildir.

4) $e^z = 1$ olsun. $(z = x+iy)$

$1 = |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x \Rightarrow x=0$ olur. Buradan

$z = iy$ bulunur.

$e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y = 1 \Rightarrow \cos y = 1$ ve $\sin y = 0$

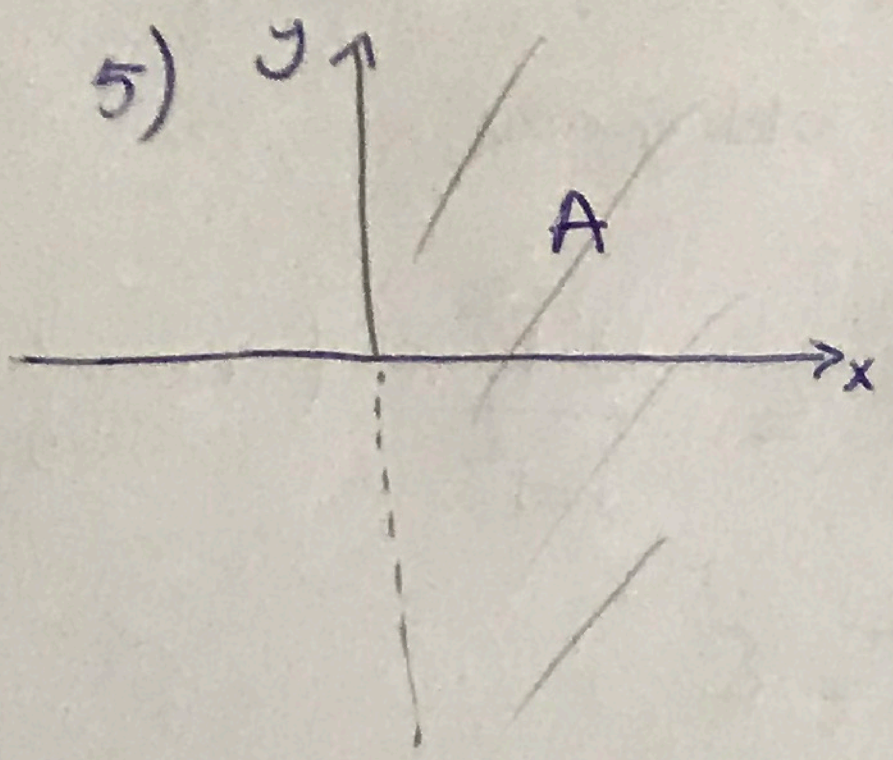
$\Rightarrow y = 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = x+iy = 0 + 2\pi n i = 2\pi n i$

Tersine, $z = n \cdot 2\pi i$ ise

$e^z = e^{2\pi n i} = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n) = 1$ elde edilir.

5)



$z_1, z_2 \in A$ olsun. $\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow r_1^2 e^{i2\theta_1} = r_2^2 e^{i2\theta_2}$

$\Rightarrow r_1^2 = r_2^2$ ve $\operatorname{Arg}(r_1^2 e^{i2\theta_1}) = \operatorname{Arg}(r_2^2 e^{i2\theta_2})$

$\Rightarrow r_1 = r_2$ ve $2\theta_1 = 2\theta_2$ ($-\pi < 2\theta_1 \le \pi$ ve $-\pi < 2\theta_2 \le \pi$) olduğundan

$\Rightarrow r_1 = r_2$ ve $\theta_1 = \theta_2$

$\Rightarrow z_1 = z_2$ olup, f, 1:1 dir.

6) a) i noktasından çıkan, 1+i noktasını içeren ışının parametrelendirilmesi

$z(t) = i(1-t) + (1+i)t, \quad 0 \le t < \infty$

$f(z(t)) = -z(t) = -i(1-t) - (1+i)t$

$= -i(1-t) + (-1-i)t, \quad 0 \le t < \infty$

olup, verilen ışının f altındaki görüntüsü, $-i$ noktasından çıkan, $-1-i$ noktasını içeren ışındır.

b) $z(t) = z_0 + Re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad f(z) = iz - 2 \Rightarrow$

$w = u + iv = f(z(t)) = iz_0 + iRe^{it} - 2 = i(x_0 + iy_0) + i(R\cos t + iR\sin t) - 2$

$= ix_0 - y_0 + iR\cos t - R\sin t - 2$

$= (-y_0 - R\sin t - 2) + i(x_0 + R\cos t)$

$\Rightarrow u = -y_0 - R\sin t - 2 \Rightarrow \sin t = \frac{u + y_0 + 2}{-R} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{(u + y_0 + 2)^2}{R^2}$

$v = x_0 + R\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{v - x_0}{R} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{(v - x_0)^2}{R^2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{(u + y_0 + 2)^2}{R^2} + \frac{(v - x_0)^2}{R^2} \Rightarrow (u + y_0 + 2)^2 + (v - x_0)^2 = R^2$

$\Rightarrow (-y_0 - 2, x_0)$ merkezli, R yarıçaplı çember.

7) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısını $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ olacak şekilde seçelim. Bu takdirde $|z-0| = |z| < \delta$ olduğunda

$$|f(z) - f(0)| = \left| \frac{(Re(z^2))^2}{|z^2|} - 0 \right| = \frac{|Re(z^2)|^2}{|z|^2} \leq \frac{|z^2|^2}{|z|^2} \quad (Re\,w \leq |w| \text{ olduğundan})$$

$$= \frac{|z|^4}{|z|^2} = |z|^2 < \delta^2 = (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

olup, f, $z=0$ noktasında süreklidir.

8) $u(x,y) = x^2 - x + y$, $\quad v(x,y) = y^2 - 5y - x$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x-1, & \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -1, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2y-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \text{ olur.}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ eşitliği ise sadece $2x-1 = 2y-5 \Rightarrow y = x+2$ doğrusu üzerinde sağlanır. Ancak bu doğru üzerindeki herhangi bir z noktasının, Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlandığı bir komşuluğu yoktur. O halde f, hiçbir yerde analitik değildir.

Yine, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ fonksiyonları her noktada sürekli olduklarından, f, $y = x+2$ doğrusu üzerindeki noktalarda türevlenebilirdir ve bu noktalardaki türevi de

$$f'(z) = u_x + i v_x = (2x-1) + i(-1) = (2x-1) - i$$

şeklindedir.